4-4 聯立方程組之解法

本節探討聯立代數方程組的三種解法：

1. **高斯消去法**
2. **反矩陣法**
3. **克拉莫法則**

其原理大部分同學已在中學時期學過，故此處將以簡易方式說明之即可。

考慮一個 n 元聯立方程組：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \cdots\cdots (1)$$

若 (1) 式中 $b_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m$，則稱 (1) 式為**齊次**（homogeneous），若 b_i 不全為 0，則稱 (1) 式為**非齊次**（nonhomogeneous），通常將 (1) 式改寫成矩陣形式如下：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \cdots\cdots (2)$$

A 稱為**係數矩陣**（coefficient matrix），即：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n},\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

在此我們先假設 $m = n$，即未知數的數目與方程式的數目相等，則 **A** 為方陣。再看如下「克拉莫法則」。

定理　克拉莫法則（Cramer's rule）

A 為 n 階非奇異矩陣，則方程組 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 之解可表為：

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 為將 **b** 取代 **A** 之第 i 行後所得之矩陣。

性質 若 $\mathbf{A}$ 為 n 階非奇異矩陣，則 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 必有唯一解。

例題 1 基本題

解 $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=10 \\ 4x_1+x_2+2x_3=3 \end{cases}$

解 方法 1 高斯消去法

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 8 & -11 & -13 \\ 0 & 7 & -14 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 8 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{35}{8} & -\frac{35}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{8} & -\frac{13}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

接著再計算如下：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{8} & -\frac{13}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

得 $x_1=2$，$x_2=-3$，$x_3=-1$

方法 2 反矩陣法

由 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，若存在反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$，則 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$\therefore\ \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 即可解得 $\mathbf{x}$ 之值，即

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{-1}{35}\begin{bmatrix} -6 & -7 & -2 \\ 2 & 14 & -11 \\ 11 & 7 & -8 \end{bmatrix}，故\ \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

方法 3 克拉莫法則

先計算 $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-35,\ |\mathbf{A}_1|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 10 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-70$

$$|\mathbf{A}_2|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 10 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=105,\ |\mathbf{A}_3|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 10 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=35$$

故得 $x_1=\dfrac{-70}{-35}=2$，$x_2=\dfrac{105}{-35}=-3$，$x_3=\dfrac{35}{-35}=-1$

類題

解$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

答 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

得 $x_1 = -2$，$x_2 = -2$，$x_3 = 4$ ■

以上所述三種方法，是在未知數與等號數目相同的情況下解方程組之方法，每種解法均簡單。當$m \neq n$時，也就是未知數與等號數目不等時我們要如何解方程組呢？或是如何判斷方程組是否有解呢？這時須從矩陣的「秩數」來判斷！

定義 秩數

$m \times n$ 矩陣 **A** 中，已為「線性獨立列向量的數目」稱為 **A** 的**秩數**（rank），記為 rank(**A**)。 ■

由秩數之定義得知，秩數並非等於矩陣列的數目，那如何知道一個矩陣之秩數呢？這可由前面說明的高斯消去法運算後得知，如下例說明。

例題 2 基本題

求 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 & 9 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & -5 \end{bmatrix}$之秩數？

解 應用高斯消去法得 $\mathbf{A} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 & 9 \\ 0 & 21 & 14 & 29 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 & 9 \\ 0 & 21 & 14 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

矩陣 **A** 之秩數意義為「有效」的列向量數目，即扣除零列後之列向量數目，故知 rank(**A**) = 2。

類題

求 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & -3 & -3\\ 4 & 4 & 8\end{bmatrix}$ 之秩數？

答 $\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & -3 & -3\\ 4 & 4 & 8\end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & -12 & -12\end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\text{rank}(\mathbf{A})=2$ ■

性質 $\text{rank}(\mathbf{A})=\text{rank}(\mathbf{A}^T)$

「線性獨立列向量之數目等於線性獨立行向量之數目。」

應用：若 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$，則 $\text{rank}(\mathbf{A})\le\min(m,n)$，取其較小數。

例題 3 說明題

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$，則 $\mathbf{A}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，即 $\text{rank}(\mathbf{A})=2$

但 $\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$，可直接看出 $\text{rank}(\mathbf{A}^T)=2$。

性質 $\mathbf{A}$ 為 n 階方陣，若 $\begin{cases}|\mathbf{A}|=0:\text{rank}(\mathbf{A})<n\\ |\mathbf{A}|\neq 0:\text{rank}(\mathbf{A})=n\end{cases}$

性質 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 均為 n 階方陣，則 $\text{rank}(\mathbf{AB})\le\min\{\text{rank}(\mathbf{A}),\text{rank}(\mathbf{B})\}$，即「矩陣愈乘秩數愈小」。

以下我們將藉著秩數的意義解釋聯立線性方程組之解的情況，首先考慮一個 n 元聯立方程組如下：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

矩陣式成為 $[\mathbf{A}]_{m\times n}[\mathbf{x}]_{n\times 1}=[\mathbf{b}]_{m\times 1}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

另外再定義一新的矩陣：

$$\mathbf{C}=[\mathbf{Ab}]=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m\times(n+1)}$$

稱 **C** 為**增廣矩陣**（augmented matrix）。

此處 n 為變數（未知數）之數目（永不改變），m 為方程式數目（可以改變，因為是「有效」方程式之數目），則方程組 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 之解可由以下定理得到說明。

定理　解的分類判斷法

已知 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，$\mathbf{C}=[\mathbf{Ab}]$，則

1. $\text{rank}(\mathbf{C})>\text{rank}(\mathbf{A})$：必無解。
2. $\text{rank}(\mathbf{C})=\text{rank}(\mathbf{A})=r$：必有解。

   此時由 r 與 n 之值區分以下二種情況：

   (1) $r<n$：有無限多組解，解含 $(n-r)$ 個未定係數。

   (2) $r=n$：唯一解，不含未定係數。

   (a) 齊次方程式：$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 之解。

   (b) 非齊次方程式：非全為 0 之解。。

定理　秩數方程式（rank equation）

齊次方程式 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{0}$ 必定有解，且滿足如下之關係：

$$n=r+c$$

其中 r：即 $\text{rank}(\mathbf{A})$

c：解之未定係數數目

n：變數之數目（永不改變）

定理　齊次方程式 $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{0}$ 的判斷

(1) $|\mathbf{A}|\neq 0$：具有唯一解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$

(2) $|\mathbf{A}|=0$：具有無限多解（必含 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 之解）

例題 4　基本題

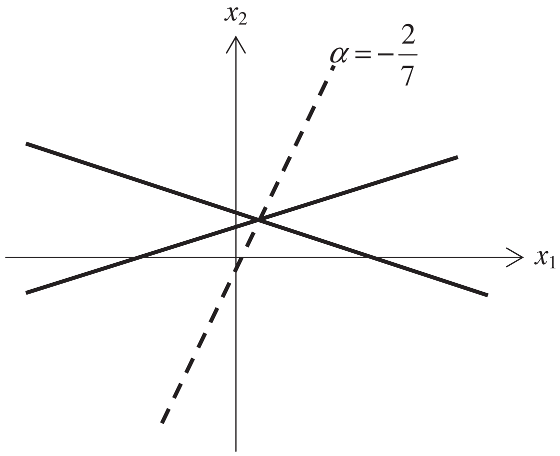
以參數 α 表示下列聯立方程組 $\begin{cases} x_1-3x_2=-2 \\ x_1+4x_2=3 \\ 3x_1-x_2=\alpha \end{cases}$ 的解之狀況。

解　由增廣矩陣為 $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & \alpha \end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & 6+\alpha \end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & \alpha+\frac{2}{7} \end{bmatrix}$

若 $\alpha\neq-\dfrac{2}{7}$，則 $\text{rank}(\mathbf{C})=3>\text{rank}(\mathbf{A})$，無解。

若 $\alpha=-\dfrac{2}{7}$，則 $\text{rank}(\mathbf{C})=\text{rank}(\mathbf{A})$，有唯一解。

此題之幾何意義為：已有二條相交之直線，第三條直線僅當 $\alpha=-\frac{2}{7}$ 才會通過其交點，如下圖所示：



類題

已知 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=4 \\ 9x_1+8x_2+7x_3=\alpha \end{cases}$，以參數 α 表示解之狀況？

答 由 $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & \alpha-9 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-9 \end{bmatrix}$

若 $\alpha \neq 9$，則 rank($\mathbf{C}$) = 3 > rank($\mathbf{A}$)，無解。

若 $\alpha = 9$，則 rank($\mathbf{C}$) = rank($\mathbf{A}$) = 2，即無限多解。 ■

例題 5 基本題

已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ -2 & 2 & 6 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 之解？

解 解方程式時，高斯消去法是萬能的！

$$[\mathbf{Ab}]=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 4 & 1\\ -2 & 2 & 6 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 4 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 10 & 4\\ 0 & -8 & -16 & -9 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 4 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 10 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 0 & -15\\ 0 & 8 & 16 & 0 & -36\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 0 & -15\\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{G}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases}x_1-x_3=-\dfrac{3}{2}\\ x_2+2x_3=-\dfrac{9}{2}\\ x_4=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=x_3-\dfrac{3}{2}\\ x_2=-2x_3-\dfrac{9}{2}\\ x_4=4\end{cases}$，$\therefore\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_3-\frac{3}{2}\\ -2x_3-\frac{9}{2}\\ x_3\\ 4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ -\frac{9}{2}\\ 0\\ 4\end{bmatrix}$

類題

解 $\begin{cases} x+3y-2z=-7 \\ 4x+y+3z=5 \\ 2x-5y+7z=19 \end{cases}$

答 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，即 $\begin{cases} x+z=2 \\ y-z=-3 \end{cases} \to \begin{cases} x=-z+2 \\ y=z-3 \end{cases}$

得解為 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z+2 \\ z-3 \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ■

為了應付考試需要，特將本節之心得整理如下，其中 n 代表未知數之數目。

綜合整理

$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{0} \Rightarrow$ 必有解 $\begin{cases} \text{唯一解（零解）：} |\mathbf{A}| \neq 0 \\ \text{無限多解（必含非零解）：} |\mathbf{A}| = 0 \end{cases}$

$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \text{無解：} \operatorname{rank}(\mathbf{Ab}) > \operatorname{rank}(\mathbf{A}) \\ \text{有解} \begin{cases} \text{唯一解：} \operatorname{rank}(\mathbf{Ab}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = r = n \\ \text{無限多解：} n = r + c\text{，}c\text{：未定係數數目} \end{cases} \end{cases}$

4-4 習題

1. 解 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

2. 解 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

3. 解 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

4. 解 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 9x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

5. 解 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 8x_5 = -2 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = -10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}$

6. 解 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

7. 探討此方程組解之情況：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \alpha \end{cases}$

8. 求矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 之秩數？

9. 求矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$ 之秩數？

10. 求矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ 之秩數？